

破壊後の形状の制御を伴う破壊シミュレーション

今給黎 隆*

ヘンリー ジョハン†

西田 友是‡

概要

映画やゲームなどにおいて、物理シミュレーションは、リアルなアニメーションを生成するためには欠かすことができない手法の一つとなっている。映画などでは、あらかじめ絵コンテによりシーンが設計され、通常ではありえない演出をしたいことがしばしば発生する。しかし、通常の物理シミュレーションでは、運動は決定論的に決まる。材質などの特性の調整によりある程度の運動の制御は可能であるが、望む結果が得られるように初期値やそれら特性を指定することは難しい。本研究では、物体を要素（破片）の集合で表現し、要素間にはねを設置するばねモデルによる破壊シミュレーションにおいて、物体の破壊後の形状を制御する手法を提案する。ユーザーにより指定された物体の堅い部分と脆い部分の情報から、要素間のばねの切れ難さを指定することで、破壊後の形状を制御する。これにより、ユーザーは物理的な運動をしつつも意図した形状の破砕物を生じるアニメーションの生成が可能となる。

1 はじめに

映画やゲームのデモ映像において、物体の破壊は多岐に用いられているコンピュータグラフィックスの表現の1つである。物体が破壊されるシーンの映像を生成するために、物理シミュレーションによる計算が広く使われる。しかし、物理シミュレーションによる運動は運動方程式により決定論的に計算されるため、映像制作のような、絵コンテが最初に作られ、その絵に合致するシーンをつくることが望まれる現場では、厳密な物理シミュレーションによる運動は適さない。また、壊れる形状をあらかじめ指定しておき、結果を逆回しすることで物理シミュレーションの適切な初期条件を作成する手法も難しい。近年、映像制作のための手法として、物理シミュレーションの衝突時の応答に摂動を加え、見た目の区別がつかない範囲で挙動を制御することで通常では起き得ない動きを生成する方法 [1] が提案されている。しかし、この手法は剛体運動の物理シミュレーションに関する非現実的な映像の制作手法であり、物体の破壊を取り扱うことは難しい。また、映像制作などの繰り返し修正する手法を前提としており、ゲームなどのインタラクティブなアプリケーションに使用するのは難しい。

本論文では、上記の問題に着目し、物体の衝突によって粉々に破壊されるような現象において、ユーザーが破壊を制御できるシミュレーション手法を提案する。具体的な制御としては、物体の堅いところと脆いところをユーザーがあらかじめ指定することで、ユーザーの意図に近くなるように物体の破壊制御を行う。実際の実験として、壁に大きな球を衝突させるシーンを取り扱う (図 5, 6)。ユーザーによる入力としては、脆さマップ (図 1) を導入し、脆さマップの黒い領域が物体の堅い部分、白い部分が領域物体の脆い部分として、脆さマップを物体にマッピングすることによって、物体の脆さを指定する。

提案法では、破壊シミュレーションとして、一様な構造の物体を事前に分割し、その間をばね (間隙ばね) で繋ぐ手法を用いる。本手法は、ばねモデルに対して広く適応することができるが、

*東京大学大学院 新領域創成科学研究科及び株式会社バンダイナムコゲームス

†南洋理工大學 コンピュータ工学科

‡東京大学大学院 新領域創成科学研究科

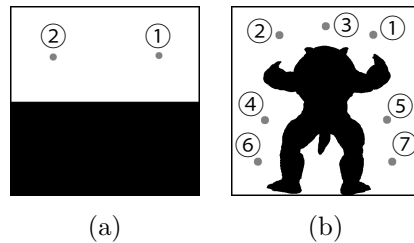


図 1: 脆さマップ．黒い色は堅い場所である．(a) は，上半分を脆くした場合．(b) は，アルマジロのモデルの形状の外側を脆くした場合．実験において物体は四角い壁であり，灰色の点は壁を破壊するために球体を衝突させる位置で，番号の順に撃ち込まれる．

本研究では，断裂の計算に拡張した拡張個別要素法 (EDEM) [2] を用いる．破壊する物体の内部に球形の EDEM 要素を配置し，これら要素の中心を母点とするポロノイ図により物体を分割する．間隙ばねを，隣接するポロノイ領域間に配置し，間隙ばねが加えられた力により切断されることで物体の破壊を表現する．また，破壊に加えられた力から微細な小片を生成する．

上記の手法による破壊シミュレーションは，すでに提唱されている研究 [3] であるが，破壊後の形状の制御は不可能であった．本研究では，間隙ばねが切れる長さや曲げおよびひねりの角度の閾値をばねごとに設定することで，亀裂の制御を行う．容易な方法として，破壊後に形状を保っておきたい部分の結合を強く，それ以外の結合を弱くする手法が考えられる．しかし，この手法では，細かな制御が難しい (図 8 が，アルマジロのモデルの形状に壁の一部を堅くし，周囲を脆くした場合の結果である．本来残るはずの腕が切り取られている)．この問題を解決するために，間隙ばねをグループ化し，いくつかの階層に分けて，階層ごとにばねの切れ難さを決定することで，破壊物の形状の制御を行う．ばねのグループ分けの際に，物体の破壊したい形状を考慮することで，ユーザーが指定した形状に近い形に物体が壊れる制御を実現する．

以下，まず，2 節では関連研究について述べる．3 節ではグループ化されたばねの切れ難さをを用いた破壊シミュレーションについて，4 節では亀裂を制御するための手法について述べる．5 節では，提案法による結果を示し，最後に 6 節でまとめと今後の課題について述べる．

2 関連研究

本研究は，破壊シミュレーションと，ユーザーによる破壊の制御の手法からなる．そこで，以下では，破壊シミュレーションと破壊の際の亀裂の制御について触れる．

2.1 破壊シミュレーション

破壊のシミュレーションには，すでに多くの研究が存在する．Terzopoulos と Fleischer[4] は，ばねモデルで，破壊を物理的に再現した．Norton ら [5] は，ばねモデルで物体内部の応力を計算し，破壊現象を表現している．Smith ら [6] は，破断面を前計算し，高速に破壊を表現している．Imagire ら [3] は，細かな破砕物を生じるシミュレーションとして，粉体工学的な視点から小片や煙の生成分布を求めた．大きなスケールでの破壊は，EDEM による物理的な制御を行っている．ばねモデル以外にも，有限要素法を使った破壊の手法が知られている．O'Brien と Hodgins[7] や Bao ら [8] は，有限要素法を用い，物理的な物体の分割の計算を行った．これらの手法は，Muller ら [9, 10] の研究により，高速な計算が可能となっている．

これらの手法は、物理的に正確なシミュレーションを目指しており、ユーザーがイメージする破壊結果や破壊過程をどのようにすれば再現できるかという知見に答えることができない。

2.2 破壊の際の亀裂の制御

物体の破壊を取り扱う方法として、物体表面の亀裂を計算する研究も広く行われている。Iben と O'Brien[11] は、有限要素法を用いて、物体表面に発生する亀裂の計算を行った。彼らの手法は、物理的な計算に基づくものであり、弾性係数等の指定により物体の破壊の制御を行うことはできるが、ユーザーが直接的に亀裂の入り方を制御することができない。Mould[12] は、ユーザーが入力した亀裂を表す線情報をテクスチャに記録し、テクスチャの情報から亀裂の生じる位置を制御する研究を行った。しかし、Mould の方法では、亀裂が生じて欲しくない箇所の指定はできないため、ユーザーが望む形状に物体を切り抜くといった制御を行うことはできない。また、3次元物体の内部の亀裂の制御を行うこともできない。

3 ばねの切れ難さの制御を伴う破壊シミュレーション

3.1 破壊シミュレーション

本研究では、物体に力学的な衝撃を加えて破壊するシーンを取り扱う。破壊のシミュレーションには、個別要素法 (DEM)[13] を物体の破壊を解析できるように拡張した拡張個別要素法 (EDEM)[2] を基にした破壊シミュレーション [3](付録 A) を拡張する。EDEM では、破壊される可能性のある場所として要素の間を間隙ばねで接続する。間隙ばねは要素間の長さおよび曲げやひねりの角度がある閾値以上の際に切断される。間隙ばねを挿入する要素のペアは、事前の計算で抽出しておく。EDEM 要素の中心を母点とする 3次元のドロネー図を計算し、ドロネー辺に間隙ばねを配置する。母点となる EDEM 要素は、最初に物体内部にランダムに配置し、その後、物体内部においてお互いが接触しない要素の直径 $2r$ 以上離すように接触力で移動させる。要素をレンダリングするには、ドロネー図の双対構造であるポロノイ図のレンダリングをすることで、中身が詰まった物体の破壊を表現する。

細かな破砕物の表現として、衝突計算の際に、要素に加えられたばねエネルギーが一定の閾値よりも大きな場合には、加えられたエネルギーの大きさに応じて破砕物の大きさの分布を計算し、レンダリングに反映させる。破砕物は、追加のメモリの使用を避けるために、元の要素のメッシュを破砕物ごとに大きさを変えてレンダリングする。

なお、他の物体との相互作用は、次の手順で扱う。床などの平面は、床をポリゴンのメッシュで構成し、それ以外の物体は、単一の EDEM の要素、もしくは間隙ばねで繋がれた EDEM の要素の集合で物体を表現する。異なる物体間の衝突は接触力による相互作用で計算する。

3.2 ばねの切れ難さの定式化

提案法では、亀裂の生成を制御するために、間隙ばねに個別に切れ難さを設定する。間隙ばねが切れる閾値を個別に調整するために、各間隙ばねに切れ難さの係数を持たせる。間隙ばね i の切れ難さは、間隙ばねが切れる長さおよび曲げやひねりの角度の閾値に対して切れ難さの係数 p_i を掛けることで調整を行う。

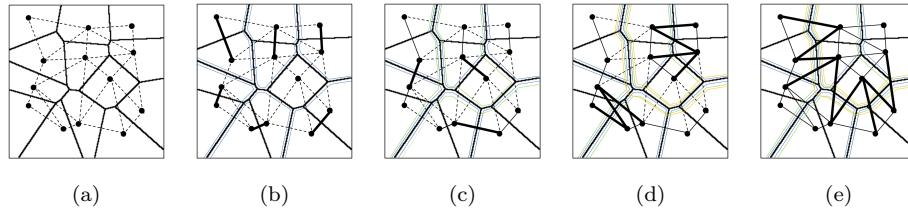


図 2: ばねの切れ難さのグループ分け．(b) から (e) の順で太い実線で繋がれる順番にグループ化される．(b) で新たに結ばれたばねが最も切れ難く，(e) で結ばれたばねが最も切れやすくする．点が EDEM 要素の中心．

単に脆い部分を切れやすく，堅い部分を切れ難くするだけでは，いくつかの点で不都合が生じる．1 つ目は，一様に切れ難さを設定すると，一度にばねが切れやすく，その際にほかの場所にも影響を及ぼしやすいということである．図 8 では，アルマジロのモデルの形状に壁の一部を強くしたが，強く設定した腕の部分にも亀裂が生じ，切り取られている．2 つ目は，脆い部分を一様に切れやすくすると，切れやすい部分の要素がばらばらになり，大きさが似た小さな破砕物が多く現れやすい．これはレンダリング結果を単調なものとする．提案法では，この問題を解決するために，間隙ばねを階層化構造を用いてグループ化し，各グループに対して切れ難さの制御を行う．

まず，破砕のために加えられた力が大きな際には小さな破片が生じ，破砕のための力が小さな場合には大きな破片のみが発生するように，空間的距離に応じてグループ分けを行い，切れ難さを定式化する．最初に，間隙ばねを配置する．本研究では，要素を母点とするドロネー図のドロネー辺に間隙ばねを配置する (図 2(a))．図 2 では，2 次元のドロネー図による解説を行うが，実験では，3 次元空間でドロネー図の計算を行う．以下の説明は 2 次元でも 3 次元でも同様に成立する．

次に，最も短い長さの間隙ばねを調べる．その間隙ばねを 1 つ目のグループ (最下層のグループ) に所属するものとする．その後，2 番目に短い長さの間隙ばねを調べ，その間隙ばねで繋がれた要素のペアが最も短い間隙ばねと繋がっていないければ，その間隙ばねも最下層のグループの間隙ばねとする．以下，長さの短い順に間隙ばねを調べ，その間隙ばねで繋がれている要素のペアが別の要素と最下層のグループの間隙ばねと繋がっていないければ，その間隙ばねも最下層のグループの間隙ばねとしてグループを構築する (図 2(b))．

次に，最下層の間隙ばね以外の間隙ばねに関して，再び最も短い間隙ばねを調べ，その間隙ばねを別のグループ (2 番目の階層のグループ) に所属するものとする．以下，長さの短い順に最下層でない間隙ばねを調べ，そのばねが繋ぐ要素が別の 2 番目の階層のグループの間隙ばねで繋がれていなければ，その間隙ばねも 2 番目の階層のグループの間隙ばねとする (図 2(c))．この工程を階層を上げながら繰り返し，最終的に，全てのばねのグループを決定する (図 2(e))．なお，現在注目している階層よりも下の階層で繋がれた要素を 1 つの塊とみなした時に，2 つの塊を繋ぐ間隙ばねが複数存在する場合がある．その際には，2 つの塊を繋ぐ全ての間隙ばねを同じ階層のグループの間隙ばねとする (図 2(d), (e))．

破壊シミュレーションにおいて，階層の低いグループの間隙ばねほど切れ難く，階層が高いグループの間隙ばねほど切れやすくする事で，大きな破片が生じやすい破壊シミュレーションが実現できる．本研究では，間隙ばね i に属する間隙ばねの切れ難さの係数 p_i に関して，切れ難い間隙ばねと切れやすい間隙ばねの切れ難さを指定して壊れやすさを制御するだけではなく，壊れた

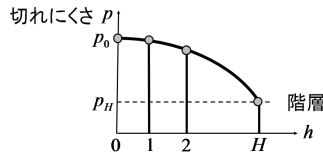


図 3: グループごとの間隙ばねの切れ難さ係数．値が大きほど，ばねは切れ難い．

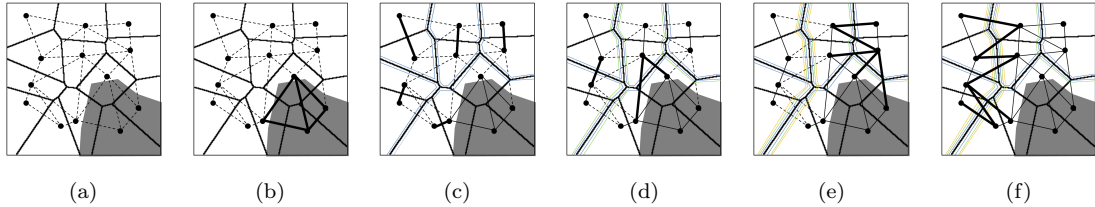


図 4: 脆さマップが与えられた場合のばねの切れ難さのグループ化．灰色の部分は強く，白い部分は脆い．(b)において太い実線で結ばれたばねが最も切れ難く，(f)で太い実線で結ばれたばねが最も切れやすい．

破片の大きさの分布を制御するために，以下の式を用いた (図 3) ．

$$p_i = p_0 + (p_H - p_0) (h_i/H)^n . \quad (1)$$

ここで， h_i は，間隙ばね i の属するグループの階層 ($h_i = 0, 1, \dots, H$) であり， H は，最大の階層の値である． p_0 ， p_H と n は破片の大きさの分布を調整するパラメータである． p_0 と p_H が近い値になれば，一様な大きさの破片が生じやすい． p_0 と p_H が等しい場合には，切れ難さの制御の効果は生じない．また， n が大きいほど高い階層のばねが切れやすくなるため，大きな破片が生じる．

4 亀裂の制御

3.2 節のシミュレーションでは，破壊後の形状を指定するような細かな制御は難しい．この節では，ユーザーによる破壊された物体の形状の制御について取り扱う．本論文では，破壊後の物体の形状の指定に画像を用いる．ここでは，この画像を「脆さマップ」(図 1) と名付ける．破壊する物体に脆さマップを仮想的に貼り，黒い領域は堅いが，白い領域は脆いものとする．

間隙ばねのグループ化は次の手順で行う．3.2 節と同様に，物体をあらかじめ分割し，間隙ばねを設置する (図 4(a)) ．また，脆さマップも作成しておく．最初に，ばねの中心が硬い領域内にあるばねを調べて 1 つのグループとする (図 4(b)) ．この階層は，切れ難くするため，最も低い階層とする．その後，残った間隙ばねのうち，一番短い間隙ばねから，前節のステップと同様にグループ化し，最下層のグループとする (図 4(c)) ．以降，階層が定まっていない間隙ばねに関して，短いものからグループ化を行い，階層構造を構築する (図 4(d)-(f)) ．階層化が構築された後に，各階層に関して式 (1) により間隙ばねの切れ難さを設定する．

本手法は，脆い領域と脆くない領域の境界で亀裂が生じやすいため，脆くない領域が切り抜かれるような破壊も生成しやすい．

本研究では，EDEM 要素を配置する際は，脆さマップを参照していない．EDEM 要素の配置に脆さマップを用いなくても，指定した形状へと破壊を制御することは可能である．インターラ

クティブなアプリケーションでは、脆さマップを動的に生成する状況がありえるが、提案手法では、EDEM 要素の再配置が不必要であり、インタラクティブ性を損ねることがない。

5 結果

提案法を用いて生成した画像の例を図 5-8 に示す。計算機は、CPU が Intel Core i7-965 Extreme Edition (3.20GHz)、GPU が NVIDIA GeForce GTX 280 を搭載した PC を用いた。壁の内部に EDEM 要素を敷き詰めて、要素の中心を母点とするポロノイ図で分割しておき、大きな剛体球を複数衝突させた。本研究の事例では、壁に衝突する剛体球の計算には、大きな単一の EDEM の要素を用いている。壁の EDEM の要素数は、2048 個である。壁の大きさは、幅、高さ、奥行きが 1.0, 1.0, 0.08 であり、EDEM 要素の半径は、 1.7×10^{-2} である。破片の大きさを制御するパラメータ p_0, p_H, n は、1.0, 0.001 および 30 に設定した。

脆さマップに図 1(a) を用いた結果が、図 5 である。図 5 では、図 1(a) の黒い色の領域にばねの中心が存在する間隙ばねを最も切れ難く、それ以外の間隙ばねを空間的に階層化された切れ難さで計算した。実行速度は 4-6 fps であり、間隙ばねの強さを変更したことによる処理速度の変更は生じない。

脆さマップに図 1(b) を用いた結果が、図 6 である。図 7(a) は、壁に貼るテクスチャを図 1(b) にした場合の結果である。剛体球の衝突後の壁の形状がアルマジロにほぼ沿った形であることがわかる。図 7(b) は、ばねの切れ難さを全て一様にした場合の結果、衝突の際に腕に対応する部分も破壊されている。また、図 8 は、階層化を使わずに、脆さマップの色に応じて物体の脆さを指定した場合である。白い部分は一様に脆く、黒い部分は一様に堅くしている。衝突の際に腕に対応する部分は破壊され、拡大した部分(図 8(b))に注目すると、飛散する破砕物の大きさがほぼ同じ大きさで単調な破砕物になっている。提案法では、大きな破片が生成される(図 9)。

式 (1) のパラメータ n を 0.001 にした際の結果が、図 10 である。図 9(a) と比較すると、小さな破片がより多く生成される。

本研究では、脆さマップの脆くない領域を破壊しようとした場合には、物体は壊れ難くはあるが、壊れるのを妨げないように最も切れ難い間隙ばねの切れ難さを有限なものとしている。例えば、脆さマップに図 1(b) を用いた際に、画像の中心に剛体球を衝突させた場合に図 11 の結果が得られる。図 11(a) が提案法による結果であり、図 11(b) は、階層化を使わずに、脆さマップの色に応じて物体の脆さを指定した場合である。提案手法では、階層化の効果により、壊れ難い領域が一纏めに崩れる現象が生じている。

6 まとめと今後の課題

EDEM による破壊シミュレーションにおいて、ばねの切れ難さを階層化を用いたグループ化により指定することで、単調な結果でない、さまざまな大きさの破砕物を生じさせる手法を提案した。また、ユーザーから指定された物体の脆さを基に間隙ばねの切れ難さを設定することで破壊を制御する手法を提案した。ユーザーによる脆さの指定には、脆さマップを使用した。提案手法は、ばねモデルを用いた破壊シミュレーション全般に用いることができるので、EDEM 以外の破壊シミュレーションにも適応することが可能である。

今後の課題として、現実の破砕現象では、破砕物の粒子径分布が Rosin-Rammler 分布 [14] などの分布関数によく合うことが知られているが、本手法の階層化されたばね定数のパラメータとして、これらの分布を反映するようなパラメータの自動設定を行いたい。その他、提案法では、

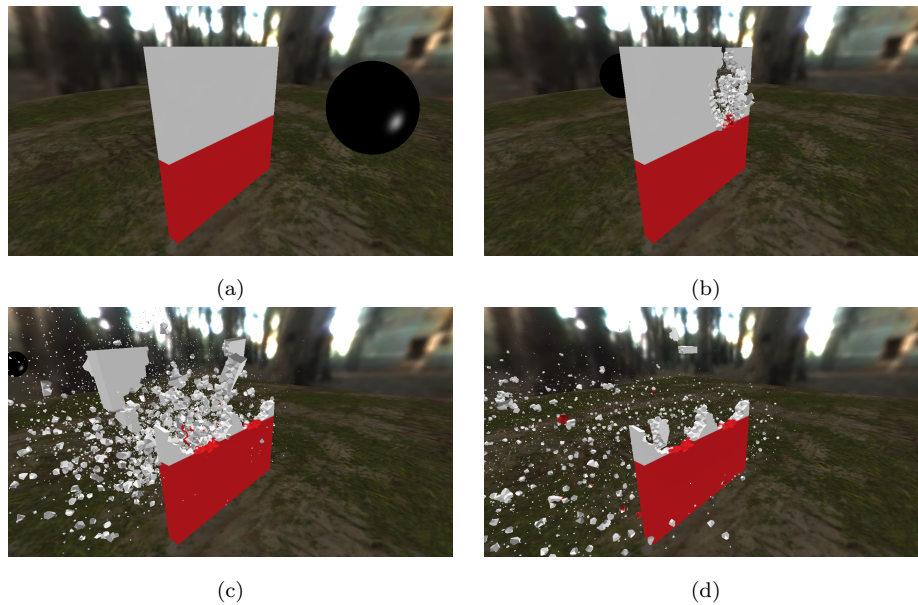


図 5: 上半分を脆くした場合の破壊の結果 . (a) , (b) , (c) , (d) は , フレーム 85 , 95 , 115 , 318 の結果 .

分割されうる場所を脆さマップの参照なしに事前に計算をした . これにより実行時に動的に生成される脆さマップへの対応が可能となったが , 事前分割よりも詳細なスケールに関する亀裂の形状制御ができない . 将来的には , 脆さマップを考慮した動的な分割に対応することで , より意図した形状を反映した亀裂の生成を実現したい . また , 本研究における脆さマップの形状の指定では , 薄い物体か , ある方向に一樣の特性をもつ材質の指定しか行うことができない . この問題の解決は , 今後の課題である .

参考文献

- [1] Twigg, C. D., and James, D. L., “Many-Worlds Browsing for Control of Multibody Dynamics,” *ACM Trans. Graph.* 26(3): pp.14:1–14:8, 2007.
- [2] Meguro K., Hakuno M., “Fracture analyses of concrete structures by the modified distinct element Mmethod,” *Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE* 6, 2, pp.283–294, 1989.
- [3] Imagire T., Johan H., Nishita T., “A Fast Method for Simulating Destruction and the Generated Dust and Debris,” *The Visual Computer* 25, 5-7, pp.719–727, 2009.
- [4] Terzopoulos D., Fleischer K., “Modeling inelastic deformation: viscoelasticity, plasticity, fracture,” *Proceedings of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp.269–278, 1988.
- [5] Norton A., Turk G., Bacon B., Gerth J., Sweeney P., “Animation of fracture by physical modeling,” *The Visual Computer* 7, 4, pp.210–219, 1991.

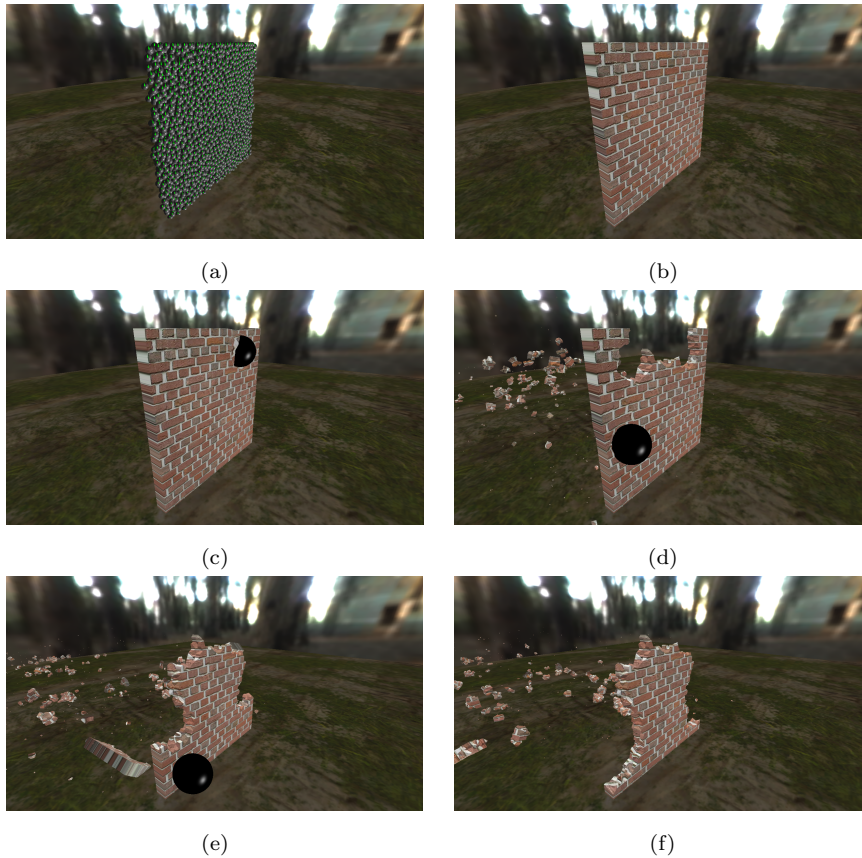


図 6: 図 1(b) の脆さマップのアルマジロの形で切れ難さを指定した場合の破壊の結果。(a) は、破壊される壁に関する EDEM 要素の配置。(b), (c), (d), (e), (f) は、フレーム 90, 109, 449, 675, 876 の結果。

- [6] Smith J., Witkin A., Baraff D., “Fast and Controllable Simulation of the Shattering of Brittle Objects,” Computer Graphics Forum 20, 2, pp.81–91, 2001.
- [7] O’Brien J., Hodgins J., “Graphical modeling and animation of brittle fracture,” Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pp.137–146, 1999.
- [8] Bao Z., Hong J., Teran J., Fedkiw R., “Fracturing Rigid Materials,” Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on 13, 2, pp.370–378, 2007.
- [9] Muller M., Mcmillan L., Dorsey J., Jagnow R., “Real-time simulation of deformation and fracture of stiff materials,” EUROGRAPHICS 2001 Computer Animation and Simulation Workshop, pp.27–34, 2001.
- [10] Muller M., Teschner M., Gross M., “Physically-based simulation of objects represented by surface meshes,” Computer Graphics International, pp.26-33, 2004.
- [11] Iben H., O’Brien J., “Generating Surface Crack Patterns,” ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation, pp.177–185, 2006.

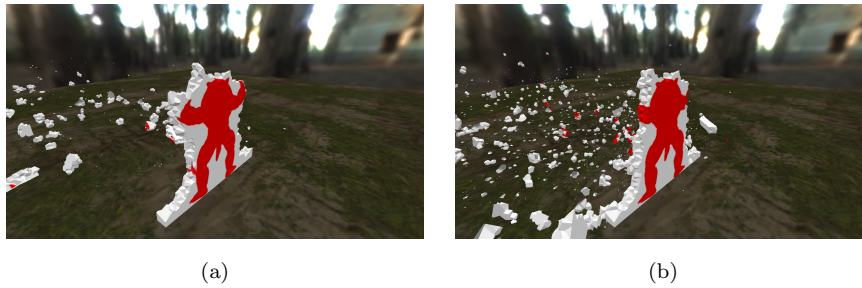


図 7: 壁に脆さマップを貼った場合のフレーム 876 の結果 . (a) は提案法による破壊の結果で , (b) は脆さマップを用いずにばねを切れ難さを一様にした場合の結果 . (b) は , アルマジロの腕に対応する部分も切り落とされている .

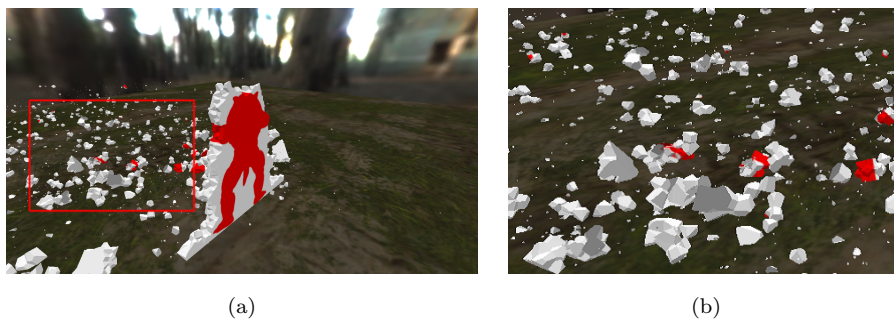


図 8: 階層化をせずに脆さマップの色に応じてばねを切れ難くさせた場合の破壊の結果 . アルマジロの腕に対応する部分にも亀裂が生じ , 切り落とされている . (a) は , フレーム 876 の結果で , (b) は , (a) の枠線の部分を拡大した図である . 破砕物は一樣な大きさになっている .

- [12] Mould D., “Image-guided fracture,” Proceedings of Graphics Interface 2005, pp.219–226, 2005.
- [13] Cundall P., Strack O., “A discrete numerical model for granular assemblies,” Geotechnique 29, 1, pp.47–65, 1979.
- [14] Rosin P., Rammler E., “The laws governing the fineness of powdered coal,” J. Inst. Fuel 7, 31, pp.29–36, 1933.

A EDEM シミュレーション

DEM では , 物体は要素の集合として表現され , 要素同士の相互作用による運動方程式を解くことで系全体の挙動を計算する . DEM では , 相互作用として , 要素同士がめり込んだ距離に応じて反発する線形ばねや , めり込み時の相対速度に応じて速度を減衰させ系を安定化させるダッシュポッドによる衝突力が用いられる . EDEM では , 衝突力の他に要素間をつなぐ「間隙ばね」が追加される . 間隙ばねは , コンクリートの場合に砂や砂利などの骨材間を結合させるモルタル等の間隙材の効果を実シミュレートするためのばねであり , 隣接する要素間に取り付ける . 間隙ばねの力により , 物体は元の形状をとどめようとする .

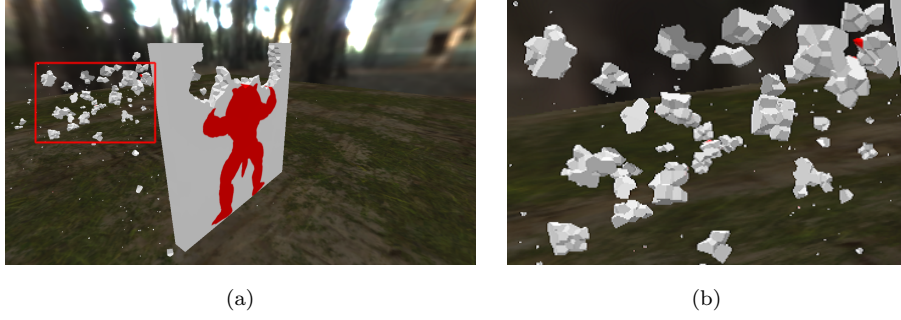


図 9: 比較のための提案法による結果．(a) は，フレーム 436 の結果で，(b) は，(a) の枠線の部分を拡大した図である．さまざまな大きさの破砕物が生じている．

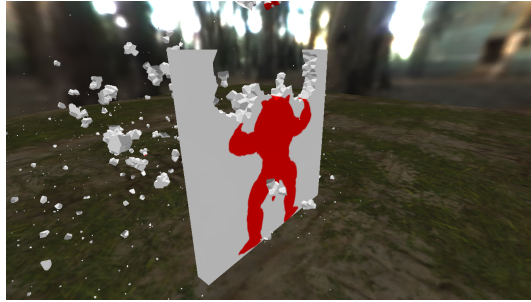


図 10: ばねの脆さのパラメータ n が 0.001 の場合のフレーム 436 の結果．小さな破砕物が多く生じる．

間隙ばねは，ばねの長さ ℓ と，ばねの曲げの角度（一方の要素の固有座標系において初期の間隙ばねの向きと，現在の間隙ばねの向きの差）およびばねのひねりの角度（一方の要素の固有座標系において初期状態と現在の状態における法線方向（要素間の中心を結ぶ方向）に垂直なベクトルの間の角度）があらかじめ決められた閾値を越えた際に消失するものとする．これは，間隙ばねが物理的に切れたことにより力が働かなくなる状況に対応する．外力により要素が移動すると，移動量が小さな場合は間隙ばねの力で元の形状に戻ろうとするが，一定以上の力が働いた場合は，間隙ばねの消失により連続体の破断が再現される．

本論文では，計算を容易にするために，要素を一様な大きさ r の球とする．要素の配置の初期状態は，お互いに接触しないように距離 $2r$ 以上離す．

要素 I の位置座標 \vec{x}_I と速度 \vec{v}_I に関するニュートンの運動方程式は，次式で与えられる．

$$M \frac{d\vec{v}_I}{dt} = \sum_{J \in \text{contact}} \vec{F}_{JI}^c + \sum_{K \in n.h.} \vec{F}_{KI}^p + M\vec{g}, \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{x}_I}{dt} = \vec{v}_I. \quad (3)$$

ここで， \vec{g} は重力ベクトル， \vec{F}_{JI}^c は接触力， \vec{F}_{KI}^p は間隙ばねによる力であり， M は要素の質量である． contact は，要素間の距離が要素の直径 $2r$ よりも小さなペア $\{I, J\}$ の集合であり， $n.h.$ は，間隙ばねで繋がれた要素のペア $\{I, K\}$ の集合とする．

接触力 \vec{F}_{JI}^c は，法線方向の接触力 \vec{F}_{JI}^{cn} と接線方向の接触力 \vec{F}_{JI}^{ct} で構成される（付図 A. 12）．

$$\vec{F}_{JI}^c = \vec{F}_{JI}^{cn} + \vec{F}_{JI}^{ct}. \quad (4)$$

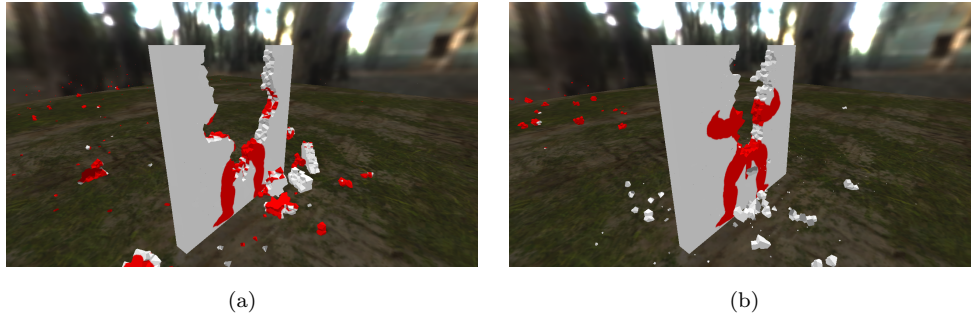


図 11: 中央に剛体球を衝突させた際の結果．(a) は，提案法の結果で，(b) は，階層化をせずに脆さマップの色に応じてばねを切れ難くさせた場合の破壊の結果である．提案法では，階層化の効果により，硬い領域がアルマジロの形で破壊された．

要素 I, J の間の法線方向の接触力は，次式で与えられる．

$$\vec{F}_{JI}^{cn} = -k^{cn} \Delta \vec{x}_{JI}^{cn} - \eta^{cn} \vec{v}_{JI}^{cn}. \quad (5)$$

ここで， k^{cn} ， η^{cn} は，線形ばねのばね定数とダッシュポッドの減衰定数であり， $\Delta \vec{x}_{JI}^{cn}$ は，要素のペア $\{I, J\}$ が接触していない状態における要素間の位置関係からの法線方向の変位， \vec{v}_{JI}^{cn} は，相対速度ベクトルの法線方向成分である．要素のペア $\{I, J\}$ の間に働く接線方向の接触力 (接触力を法線方向と垂直な平面へ射影した力の成分) は，以下で与えられる．

$$\vec{F}_{JI}^{ct} = -\eta^{ct} \vec{v}_{JI}^{ct}. \quad (6)$$

\vec{v}_{JI}^{ct} は，各速度の差分ベクトルの接線方向の成分である．間隙ばねによる力 \vec{F}_{KI}^p は，物体の形状を保つための復元力として定義する．各要素の復元力は繋がれた要素の相対位置が元の関係に戻る条件として決められる．

$$\vec{F}_{KI}^p = -k^p \Delta \vec{x}_{KI}. \quad (7)$$

$\Delta \vec{x}_{KI}$ は初期状態からの要素のペア $\{I, K\}$ の相対位置の変化， k^p は間隙ばねのばね定数である．

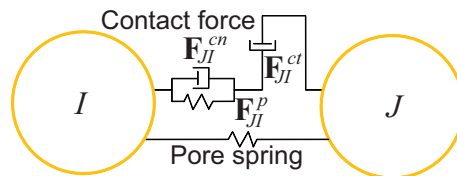


図 12: 2つの要素間の力．